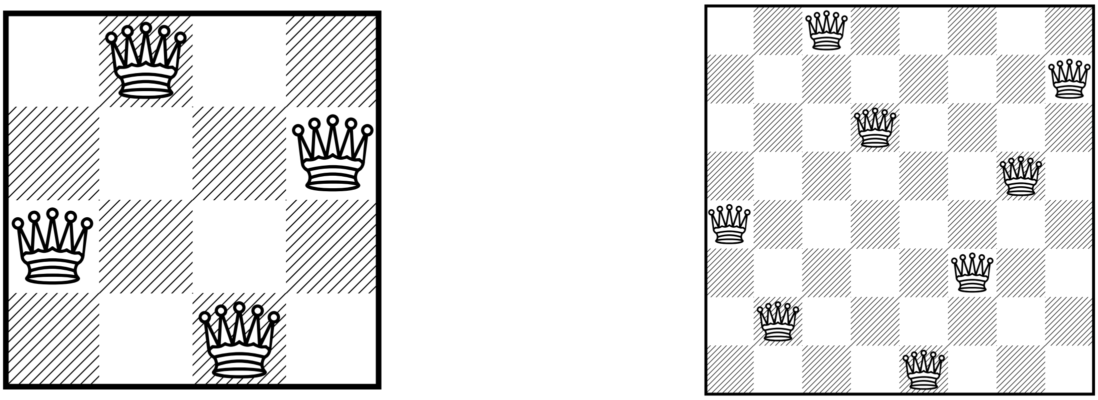
On s'interesse dans ce travail au problème des huit reines [1]. On dispose d'un échiquier classique (8x8 cases) et l'on souhaite savoir si il est possible de placer 8 reines sur cet échiquier sans qu'aucune reine n'en menace une autre.
Dans un jeu d'échec une reine (dame) menace toutes les pièces de l'échiquier qui sont situées sur la même ligne, la même colonne ou sur la même diagonale.
Si l'on considère plus généralement le même problème mais pour des échiquiers de tailles quelconques ($ntimesn$), on parlera alors du prblème des n reines. On voit facilement que pour $n = 1$ il n'y a qu'une solution mais aucune pour $n = 2$ ou $n = 3$. Pour $n = 4$ et $n = 8$ on a, par exemple, les solutions :



(a) Une solution pour les 4 reines

(b) Une solution pour les huit reines

Une stratégie possible pour trouver une solution consiste à placer la première reine sur la première case libre de la première ligne, éliminer les cases désormais interdites sur l'échiquier et recommencer la même opération pour les lignes suivantes.
Si le placement de la $i + 1^{\text{ème}}$ s'avère impossible (les cases de cette ligne sont menacées par une des précédentes reines placée) il faut revenir en arrière et déplacer la $i^{\text{ème}}$ reine sur la prochaine case libre, si elle existe, et si la situation ne se débloque pas, on remonte à la ligne précédente et ainsi de suite.

On peut décrire cette stratégie par un graphe dont les sommets sont les différents états du jeu et les arêtes représentent les transitions d'un état à un autre. Dans le cas qui nous intéresse, le graphe ne possède pas de cycle (pas de retour possible), c'est donc un arbre appelé arbre de décision [2].
Le jeu commence donc avec un échiquier vide et on change d'état à chaque fois qu'une nouvelle reine est placée. Il y a 8 façons possibles de placer la première reine sur la première colonne. Il s'agit ensuite de déterminer à quelle ligne placer la deuxième reine et ainsi de suite. On peut ainsi représenter une solution par un vecteur (de longueur 8) contenant les numéros de lignes où se trouvent nos huit reines.
Il s'agit d'un parcours dans un graphe implicite [3].

Proposer un algorithme de type **backtracking** permettant de déterminer une solution au problème.
Déterminer le nombre de solutions pour un placement imposé de la première reine .
Pouvez-vous déterminer l'existence d'autres solutions (en partant d'autres positions) sans faire tourner votre programme [5].
Pouvez-vous déterminer toutes les solutions pour des échiquiers de 6×6 et 8×8. Qu'en est-il s'il l'on considère des échiquiers de taille quelconque $n \times n$?
Pour aller (beaucoup) plus loin, on pourra consulter [4].
Enfin, pour finir on aurait pu construire un graphe dont les sommets représentent les cases de l'échiquier. Une arête relie deux cases si une dame placée sur l'une contrôle l'autre.
Il faut alors trouver un ensemble maximal de sommets tels qu'il n'existe aucune arête entre ces sommets (un tel ensemble est dit indépendant).

Références

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_des_huit_dames

[2] https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_décision

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_graph

[4] https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X07010394#sec4

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/Isomorphisme_de_graphes